Chapitre 26 : Espaces euclidiens

Dans tout le chapitre, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$

1 Généralités

1.1 Produit scalaire

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel (réel).
Un produit scalaire sur E est une application

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \begin{cases} E^2 \to \mathbb{R} \\ (u,v) \to \langle u \mid v \rangle \end{cases}$$

- ∗ linéaire
- ∗ symétrique (càd $\forall u, v \in E$, $\langle u \mid v \rangle = \langle v \mid u \rangle$)
- ∗ et définie positive (càd $\forall u \in E$, $\langle u \mid u \rangle \geq 0$ et $\forall u \in E$, $\langle u \mid u \rangle = 0 \implies u = 0_E$)

Un espace préhilbertien (réel) est la donnée d'une ev E et d'un produit scalaire sur E
Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.

1.2 Norme euclidienne

Définition 1.2. Soit E un espace préhilbertien.
- ∗ La norme (euclidienne) de $u \in E$ est $\|u\| = \sqrt{\langle u \mid v \rangle}$
- ∗ Le distance de u à $v \in E$ est $\mathrm{d}(u,v) = \|v - u\|$

Théorème 1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Soit E un espace préhilbertien et $u, v \in E$
On a

$$\langle u \mid v \rangle \leq |\langle u \mid v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

"Le produit scalaire est inférieur au produit des normes"

Théorème 1.4. La norme $\|\cdot\|$ est une norme, càd qu'on a :
Positivité : $\forall u \in E$, $\|u\| \geq 0$
Séparation : $\forall u \in E$, $\|u\| = 0 \implies u = 0_E$
Homogénéité : $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$
Inégalité triangulaire : $\forall u, v \in E$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Remarques :
- ∗ On a une identité de polarisation :

$$\langle u \mid v \rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$$

  la norme permet de retrouver le produit scalaire.
- ∗ On a une autre identité remarquable, dite identité du parallélogramme :
  pour tous $u, v \in E$

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

2 Orthogonalité

2.1 Définition

Dans toute cette section, E est un espace préhilbertien.

Définition 2.1.

* Deux vecteurs $u, v \in E$ sont dits orthogonaux (et on note $u \perp v$) si $\langle u \mid v \rangle = 0$
* Un vecteur $u \in E$ est orthogonal à une partie X de E (et on note $u \perp X$) si $\forall v \in X, u \perp v$
* Deux parties X et Y de E sont orthogonales (et on note $X \perp Y$) si $\forall u \in X, \forall v \in Y, u \perp v$

Théorème 2.2 (Pythagore)**.** Soit $u, v \in E$
Alors $u \perp v$ ssi $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Définition 2.3. Soit X une partie de E
On définit l'orthogonal de X

$$X^\perp = \{u \in E \mid u \perp X\} = \{u \in E \mid \forall v \in X,\ \langle u \mid v \rangle = 0\}$$

Proposition 2.4. Soit X une partie de E
On a :

* $X^\perp$ est une sev de E
* $X^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$

Théorème 2.5 (de représentation de Riesz)**.** Soit E un espace euclidien et $\varphi \in E^*$
Alors il existe $u \in E$ tel que $\varphi : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ v \mapsto \langle u \mid v \rangle \end{cases}$

2.2 Familles et bases orthonormées

Définition 2.6. Soit E un espace préhilbertien.

* Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j \in I, \langle x_i \mid x_j \rangle = 0$
* La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite orthonormée (ou orthonormale) si les vecteurs sont en outre de norme 1, càd $\forall i, j \in I, \langle x_i \mid x_j \rangle = \delta_{ij}$

Proposition 2.7. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (en particulier, toute famille orthonormée) est libre.

Définition 2.8. Une base orthogonale (resp. orthonormée) (BON) d'un espace préhilbertien E est une base de E qui est également une famille orthogonale (resp. orthonormée).

Théorème 2.9. Tout espace euclidien E possède une base orthonormée.

Remarque : On utilise l'algorithme d'orthonormalisation :
Pour $k \in [\![1, n]\!]$ on remplace v_k par

$$\frac{v_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \langle v_k \mid e_j \rangle e_j}{\|v_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \langle v_k \mid e_j \rangle e_j\|}$$

Corollaire 2.10 (Théorème de la base orthonormée incomplète)**.**
Soit E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_r)$ une famille orthonormée.
Alors il existe $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ telle que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E

Proposition 2.11. Soit E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de E
Alors, pour tous $x, y \in E$ on a :
- $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \, e_i$
- $\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \langle y \mid e_i \rangle$
- $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle^2$

Autrement dit, dans une BON, tous les calculs se font comme dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
Plus conceptuellement, tout espace euclidien de dimension n est isomorphe (en tant qu'espace euclidien) à $\mathbb{R}^n$

3 Projection orthogonale

Dans toute la section, E est un espace préhilbertien et F un sev de dimension finie de E

3.1 Définition

Proposition 3.1. Avec ces notations (F de dimension finie !) on a :
- $E = F \oplus F^{\perp}$
- $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$

Définition 3.2. On note p_F et on appelle projection orthogonale sur F le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$

Proposition 3.3. Si F possède une base orthonormée $(e_1, \dots, e_r)$, on a

$$\forall x \in E,\ p_f(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x \mid e_i \rangle \, e_i$$

Proposition 3.4. Soit $x \in E$
- Le projeté $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $\forall y \in F$, $\langle p_F(x) \mid y \rangle = \langle x \mid y \rangle$
- Si F possède une base (pas nécessairement ON) $(v_1, \dots v_r)$, cette condition équivaut à $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\left\langle p_F(x) \mid e_j \right\rangle = \left\langle x \mid e_j \right\rangle$

Proposition 3.5 (Inégalité de Bessel)**.** On a $\forall x \in E$, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$

3.2 Distance à un sev de dimension finie

Proposition 3.6. Soit E un espace préhilbertien et F un sev de dimension finie de E. Soit $x \in E$
On a $\forall y \in F$, $\|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$ avec égalité ssi $y = p_F(x)$

Définition 3.7. Avec les mêmes notations, $\|x - p_F(x)\|$ est la distance de x à F, notée $d(x, F)$

3.3 Cas d'un hyperplan

Dans cette section, E est un espace euclidien et F est in hyperplan de E. On fixe un vecteur normal n de F (càd F = $\mathrm{Vect}(n)^{\perp}$)

Proposition 3.8. On a :

$$p_F(x) = x - \frac{\langle x \mid n \rangle}{\|n\|^2} n \qquad \text{et} \qquad d(x, F) = \frac{|\langle x \mid n \rangle|}{\|n\|}$$